Задачи на комбинаторику

Теория

<u>Комбинаторика</u> – это наука, с который каждый встречается в повседневной жизни: сколько способов выбрать 3 дежурных для уборки класса или сколько способов составить слово из данных букв. В целом, комбинаторика позволяет вычислить, сколько различных комбинаций , согласно некоторым условиям, можно составить из заданных объектов (одинаковых или разных).

Как наука комбинаторика возникла еще в 16 веке, а теперь ее изучает каждый студент (и зачастую даже школьник).

Она делится на 3 основные части:

1. Сочетание
2. Перестановка
3. Размещение

<u>Сочетание</u>

В комбинаторике сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений .

Так, например, наборы (3-элементные сочетания, подмножества, $k = 3$) {2, 1, 3} и {3, 2, 1} 6-элементного множества {1, 2, 3, 4, 5, 6} $(n = 6)$ являются одинаковыми (в то время как размещения были бы разными) и состоят из одних и тех же элементов {1,2,3}.

Число сочетаний из n по k равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Сочетанием с повторениями называются наборы, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз.

Число сочетаний с повторениями из n по k равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}.$$

Перестановка

В комбинаторике перестановка — это упорядоченный набор чисел обычно трактуемый как биекция на множестве, которая числу i ставит в соответствие i-й элемент из набора. Число n при этом называется порядком перестановки. Как синоним слову «перестановка» в этом смысле некоторые авторы используют слово расстановка.

В теории групп под перестановкой произвольного множества подразумевается биекция этого множества на себя. Как синоним слову «перестановка» в этом смысле некоторые авторы используют слово подстановка. (Другие авторы подстановкой называют наглядный способ записи перестановки.)

Число всех перестановок порядка равно числу размещений из n по n, то есть факториалу:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Специальные типы перестановок

- Тождественная перестановка — перестановка e, которая каждый элемент $x \in X$ отображает в себя: $e(x) = x$.
- Инволюция — перестановка τ, которая является обратной самой себе, то есть $\tau \cdot \tau = e$.
- Беспорядок — перестановка без неподвижных точек.
- Циклом длины ℓ называется такая подстановка π, которая тождественна на всём множестве X, кроме

подмножества $\{x_1, x_2, \ldots, x_\ell\} \subset X$ и $\pi(x_\ell) = x_1, \pi(x_i) = x_{i+1}$.
Обозначается $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$..

Число перестановок, содержащих k циклов, — есть числа Стирлинга первого рода

- Транспозиция — перестановка элементов множества X, которая меняет местами два элемента. Транспозиция является циклом длины 2.

Размещение

В комбинаторике размещением (из n по k) называется упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов.

Пример 1: — это 4-элементное размещение из 6-элементного множества .

Пример 2: некоторые размещения элементов множества по 2: … … …

В отличие от сочетаний , размещения учитывают порядок следования предметов. Так, например, наборы и являются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов (то есть совпадают как сочетания).

Количество размещений из *n* по *k*, обозначаемое A_n^k,
равно убывающему факториалу:

$$A_n^k = n^{\underline{k}} = (n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!.$$

Последнее выражение имеет естественную комбинаторную интерпретацию: каждое размещение из n по k однозначно соответствует некоторому сочетанию из n по k и некоторой перестановке элементов этого сочетания; число сочетаний из n по k равно биномиальному коэффициенту , в то время как перестановок на k элементах ровно k! штук. При k=n количество размещений равно количеству перестановок порядка n:

$$A_n^n = P_n = n!.$$

Размещение с повторениями

Размещение с повторениями или выборка с возвращением — это размещение «предметов» в предположении, что каждый «предмет» может участвовать в размещении несколько раз. Количество размещений с повторениями.

По правилу умножения количество размещений с повторениями из n по k, обозначаемое $\bar{A}_n^k$, равно:

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Например, количество вариантов 3-значного кода, в котором каждый знак является цифрой от 0 до 9 и может повторяться, равно:

$$\bar{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000.$$

Ещё один пример: размещений с повторениями из 4 элементов a, b, c, d по 2 равно $4^2 = 16$, эти размещения следующие:

$$aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd.$$

Задачи

I уровень

1. В правлении фирмы входят 5 человек. Из своего состава правление должно выбрать президента и вице-президент. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:
Президентом можно выбрать одного из 5, а вице-президентом можно оставшихся членов правления, значит 5*4 = 20 способами.

Ответ: 20 способами

2. Сколько сигналов можно подать пятью различными флажками, поднимая их в любом количестве и в произвольном порядке?

Решение:
$A^1_5 + A^2_5 + A^3_5 + A^4_5 + A^5_5 = 5!/(5-1)! + 5!/(5-2)! + 5!/(5-3)! + 5!/(5-4)! + 5!/(5-5)! = 325$

Ответ: 325

3. Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

Решение:

используем формулу количества перестановок:

$P_5 = 5! = 120$

Ответ: 120 способами

4. Боря, Дима и Володя сели играть в «очко». Сколькими способами им можно сдать по одной карте? *(колода содержит 36 карт)*

Решение:

Здесь важно не только то, какие три карты будут извлечены из колоды, но и то, как они будут распределены между игроками. По формуле размещений :

$A_{36}^3 = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 42840$ способами можно раздать 3 карты игрокам.

Есть и другая схема решения, которая, с моей точки зрения, даже понятнее:

$C_{36}^3 = \frac{36!}{33! \cdot 3!} = 7140$ способами можно извлечь 3 карты из колоды.

Теперь давай те рассмотрим, какую-нибудь одну *из семи тысяч ста сорока* комбинаций , например: король пик, 9 червей , 7 червей . Выражаясь комбинаторной терминологией , эти 3 карты можно «переставить» между Борей , Димой и Володей $P_3 = 3! = 6$ способами:

КП, 9Ч, 7Ч;
КП, 7Ч, 9Ч;
9Ч, КП, 7Ч;
9Ч, 7Ч, КП;
7Ч, КП, 9Ч;
7Ч, 9Ч, КП.

И аналогичный факт справедлив **для любого** уникального набора из трёх карт. А таких наборов, не забываем, мы насчитали $C_{36}^3 = 7140$. Не нужно быть профессором, чтобы понять, что най денное количество сочетаний следует умножить на шесть:

$C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840$ способами можно сдать по одной карте трём игрокам.

По существу, получилась наглядная проверка формулы $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$, окончательный смысл которой мы проясним в следующем параграфе.

Ответ: 42840

5. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

Решение:

Один фрукт можно выбрать, очевидно, тремя способами – взять либо яблоко, либо грушу, либо банан. Формальный подсчёт проводится по формуле количества сочетаний :

$$C_3^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$$

Ответ: 3

II уровень

1. Сколькими различными способами можно выбрать из 15 человек делегацию в составе трех человек?

Решение:

Различными будем считать те делегации, которые отличаются хотя бы одним членом. Таким образом, нужно вычислить C^3_{15}=15!/(3!(15-3)!)=(15*14*13)/(1*2*3)=455

Ответ: имеется 455 различных способов избрания этой делегации.

2. Имеется 5 разноцветных фишек, которые выкидываются по 3 в ряд. Сколько существует различных комбинаций из трех последовательно выложенных фишек? Сколько будет комбинаций , если одна из фишек имеет уже определенный (один из пяти) цвет?

Решение:

Поскольку порядок расположение выбранных из трех фишек имеет значение, то решением первой задачи является число размещений :

$$N_1 = A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Во втором случае число фишек, из которых производится выбор, уже равен 4 (один цвет уже фиксирован) и требуется выбрать только 2 фишки. Таким образом, число комбинаций равно $K = A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$ С другой стороны, фиксированная фишка может занимать одно из трех мест. Тогда общее число комбинаций равно

$$N_2 = K \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36.$$

Ответ: 36

3. Для посещения театра закуплено 2n билетов в один ряд партера. Сколькими способами можно распределить эти билеты между n мужчинами и n женщинами, чтобы два мужчины или две женщины не сидели рядом.

Решение:

Пронумеруем числами 1, 2, 3, ..., 2n места ряда. Если мужчины сядут на места с нечетными номерами, а женщины — на места с четными номерами, то вариантов такого размещения будет n! Вместе с тем мужчины могут сесть на места с нечетными номерами также n! способами. Следовательно, общее число способов, которые необходимо най ти в задаче, когда мужчины занимают места с нечетными номерами, а женщины — места с четными номерами, составляет

$$n!*n! = (n!)^2.$$

Но мужчин можно посадить на места с четными номерами, а женщин — на места с нечетными номерами и провести аналогичные рассуждения. Отсюда следует, что общим количеством вариантов будет число $(n!)^2 + (n!)^2 = 2\,(n!)^2$.

Ответ: $2\,(n!)^2$

III уровень

1. В ящике находится 15 деталей . Сколькими способами можно взять 4 детали?

<u>**Решение:**</u>

прежде всего, снова обращаю внимание на то, что по логике условия, детали считаются <u>**различными**</u> – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы *(в этом случае их можно, например, пронумеровать).*

В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей . Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей .

$$C_{15}^{4} = \frac{15!}{(15-4)!\cdot 4!} = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = (*)$$

$$11! = 39916800, \quad 15! = 1307674368000.$$

$$(*) = \frac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{11!\cdot 4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24} = 1365$$

– способами можно взять 4 детали из ящика.

<u>Ответ:</u> 1365

2. Сколько существует способов рассадить за круглый стол 5 юношей и 5 девушек так, чтобы они чередовались?

<u>Решение:</u>

На рисунке 1 изображен стол, на котором для удобства пронумерованы места.

Предположим, что на месте номер 1 сидит юноша. Тогда все юноши садятся через 1 от этого места (на нечетные места), а девушки – на четные. Количество способов усадить 5 юношей на 5 кресел (количество перестановок) – это P_5, количество способов усадить 5 девушек на 5 кресел – это также P_5. Значит, всего вариантов усадить юношей и девушек – это $(P_5)^2$. Однако на месте номер 1 может сидеть девушка (на четных – юноши, на нечетных – девушки), тогда окончательный ответ будет в два раза больше, то есть $2\cdot(P_5)^2$.

Рисунок 1

$2 \cdot (P_5)^2 = 2 \cdot (5!)^2$

Ответ: $2 \cdot (5!)^2$

3. Из 2 математиков и 10 экономистов надо составить комиссию из 10 человек. Сколько есть способов сделать это при условии, что в комиссии должен участвовать хотя бы 1 математик?

Решение:

Рассмотрим два случая:

В комиссии будет один математик.

Существует 2 способа выбрать 1 математика из 2. Из 10 экономистов нужно выбрать 9 человек; количество способов выбрать из 10 человек 9 – это C_{10}^{9}. Следовательно, всего способов:

$2 \cdot C_{10}^{9} = 2 \cdot 10 = 20$ Однако можно посчитать иначе: выбирать не 9 экономистов из 10, а выбрать 1 экономиста из 10, который не попадет в комиссию, то есть:

$2 \cdot C_{10}^{1} = 2 \cdot 10 = 20$

Ответ: 20

Задачи для самостоятельного решения

1. В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

2. В Стране Чудес есть четыре города: А, Б и В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги, Из города А в город Г – две дороги, и из города Г в город В – тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

3. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

4. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитай те отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

5. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

6. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

7. Чемпионат России по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий , если участвуют 18 шахматистов?

8. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

9. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

10. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

11. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых четна?

12. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

13. Назовем натуральное число «симпатичным» , если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

14. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией . Сколько авиалиний в этой стране?

15. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

16. Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

17. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей ?

18. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать?

19. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

20. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Ответы

1. 15
2. 30
3. 120
4. 120
5. 70
6. 729
7. 153
8. 9!/2!3!4!
9. 84
10. 91
11. $45 \cdot 10^7$
12. 3136
13. 625
14. 190
15. 17160
16. 531440
17. 30; 15
18. 7054320
19. 3024
20. 105